Contest 13 by Abracadabra

比赛概况

- 预期难度：Rin < Umi, Honoka, Nozomi < Hanayo, Kotori < Eli < Maki
- 实际情况

题号	AC	提交
Eli	9	37
Hanayo	4	10
Honoka	0	0
Kotori	11	54
Maki	0	0
Nozomi	2	59
Rin	36	74
Umi	35	173

Rin. Bulbasaur and NDS

- 一台游戏机由两节电池供电，每消耗两节电池1单位电量可以玩1小时。现在有N节不同电量的电池，问最多可以玩多久。

- 设所有电池电量总和为sum，电量最大的电池电量为max。
- 若sum-max <= max，显然答案为sum-max
- 若sum-max > max，答案为sum/2，因为我们可以先把sum-max的电量消耗到max.
- 证明：如果sum-max的电量没法消耗到max，说明有一节电池的剩余电量大于max，与电量最大的电池电量为max矛盾。

Umi. Simple LCM

- 给定两个正整数a和c，求最小的b，使得a，b的LCM为c.

- 首先c必须能被a整除，否则无解
- lcm(a, b) = c ➔ a * b / gcd(a, b) = c ➔ b = (c/a) * gcd(a, b)
- 设bx = k * (c/a)，设ax = a / k，k整除a
- 如果ax和bx互质，则lcm(a, bx) = a * bx / gcd(a, bx) = a * bx / gcd(ax * k, bx) = a * bx / [gcd(ax, bx) * gcd(k, bx)] = a * bx / k = a * k * (c/a) = c，bx即为答案
- 初始化b = c/a，开始循环，每次求a和b的最大公约数g，如果为1，b即为答案，如果不为一，b *=g， a /= g.

Kotori. The Elder’s High Belt

- 给出n个人和m条裤子的描述，n*m种组合中，问最高可以穿出的裤腰带高度是多少
- 每个人的参数：腰围D1，腿围D2，腿长H
- 每条裤子的参数：腰围d1，腿围d2，腿长h1，总长h2
- 能穿上裤子等价于：D1 <= d1, D2 <= d2
- 腰带高度 = H + h2 - h1

Kotori. The Elder's High Belt

- 每条裤子只关心h2 – h1，可以用一个h记录
- 对人按照D1递增的顺序排序，对裤子按照d2递增的顺序排序
- 开一个排列数组p，记录裤子的编号，按照裤子d1递增的顺序排序
- 用线段树维护裤子的区间h最大值

- 遍历每个人
- 把所有d1小于当前人D1的裤子对应的h置为0（利用排序数组p实现）
- 二分查找，在裤子中找到最小的满足d2 >= D2的编号，查询该编号之后的裤子h的最大值，和当前人的H相加

Eli. Simple GCD

- 求n,m内互质对个数。

- 莫比乌斯反演。
- F(p)=gcd(i,j)=p的个数。

$$\mathrm{G(k)} = \sum_{\mathrm{k}|q} F(q) = \left\lfloor \frac{\mathrm{n}}{k} \right\rfloor * \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor$$

$$F(q) = \sum_{q|d} \mu(\frac{d}{q}) G(d)$$

$$F(1) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) G(d) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \left\lfloor \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{d}} \right\rfloor * \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$$

Eli. Simple GCD

```
void Init()
{
    memset(flag,0,sizeof(flag));
    for(int i=2;i<=maxn;i++)
    {
        if(!flag[i])
            prime[total++]=minp[i]=i;
        for(int j=0;j<total;j++)
        {
            int k=i*prime[j];
            if(k>maxn)
                break;
            flag[k]=true;
            minp[k]=prime[j];
```

```
                if(!(i%prime[j]))
                    break;
            }
        }
    mu[1]=1;
    for(int i=2;i<=maxn;i++)
    {
        int p=minp[i];
        if(!(i/p%p))
            mu[i]=0;
        else
            mu[i]=-mu[i/p];
    }
}
```

Hanayo. Bulbasaur and Mining（CF559C）

- 在一个坐标范围从(0,0,0)到(X,Y,Z)的世界中，每次可以从(a,b,c)走到(a+1,b,c)或(a,b+1,c)或(a,b,c+1)，其中有N个位置是不能走的。问从(0,0,0)走到(X,Y,Z)有多少方案。

- 如果没有障碍，答案显然是C(X+Y+Z, X) * C(Y+Z, Y).
- 考虑有障碍的情况。先把所有障碍按坐标从小到大排序。设f(i)表示：从(0,0,0)不经过前i-1个障碍，走到第i个障碍的方案数。我们只要从原先的答案中扣掉f(1)+f(2)+...+f(N)即可。
- 因为f(2)的方案数中不包括经过第1个障碍的方案数，所以不会重复，其它的f值也一样。
- f(i)怎么算呢？和原问题类似，f(i) = C(xi+yi+zi, xi) * C(yi+zi, yi) - f(1) - f(2) -...- f(i-1).

Nozomi. Play Guitar in Hawaii Again

- 求第n小的仅含质因数p1,p2,...,pk的数。（以下称它为丑数）
- Source: USACO Section 3.1 Humble Numbers

- Solution 1:
- 用堆，每次从堆里取出最小的元素，乘k个质数后放回，取n次。
- O(NKlogNK) 没有试过，本来并不打算卡的，但是结果被MLE?（NK的堆）
- TsReaper学长的做法。O(N)的堆。
- 记(mul, i)表示当前乘积为mul，做到了第i个质数。
- 那么(mul, i)可变成(mul*prime[i], i)和(mul/prime[i]*prime[i+1], i+1)

Nozomi. Play Guitar in Hawaii Again

- Solution 2:
- 如果已知前i个丑数，找第i+1个丑数x，可以知道，x一定是前i个丑数中的一个乘某个质数得到的。
- 对每一个质数，找到乘以它后恰大于第i个丑数的丑数，从这k个数中取最小就是x
- 二分找O(NKlogN) 开数组线性维护O(NK)

Honoka. Play Guitar in Hawaii

- 求能被质数p1,p2,...,pk之一整除的第n个数
- 改编自USACO Section 3.1 Humble Numbers

- 可能思路被另一个题带跑了...（两个题放一起有毒）
- 二分答案+容斥
- 关于容斥：虽然k可能达到100，但是数据随机生成（不知道学长们有没有看到这句话），
- 在1-1000000之间取质数。容斥层数不多。

Maki. Mistaken Food

- 有n个盒子，现在从里面取p个，q个是肉盒子，现在取出第p+1个，这个盒子是肉盒子的概率是多少。

- 根据贝叶斯公式，P(AB)=P(A|B)*P(B)=P(B|A)*P(A)
- 其中，P(Ai)=N个盒饭里面有i个肉=1/(N+1)，P(B)=p个饭盒里面有q个是肉=1/(p+1)
- 那么P(Ai)*P(B|Ai)=P(B)*P(Ai|B)

Maki. Mistaken Food

- 根据题目的要求：

$$\sum P(Ai \mid B) * \frac{i-q}{\mathrm{N}-p}$$

- 又

$$P(Ai \mid B) = \frac{P(Ai) * P(Ai \mid B)}{P(B)}$$

$$P(Ai) = \frac{1}{N+1}, P(B) = \frac{1}{p+1}$$

$$P(Ai \mid B) = \frac{(p+1)}{N+1} * \frac{C_i^q * C_{\mathrm{N}-i}^{p-q}}{C_N^p}$$

Maki. Mistaken Food

鉴于有学长不理解为什么是1/(n+1)和1/(p+1)。

$$P(Ai \mid B) = \frac{P(Ai) * P(Ai \mid B)}{P(B)}$$

$$\sum P(Ai \mid B) = 1$$

$$P(Ai \mid B) = k * \frac{C_i^q * C_{\mathrm{N}-i}^{p-q}}{C_N^p}$$

$$k * \sum_{i=0}^{N} \frac{C_i^q * C_{\mathrm{N}-i}^{p-q}}{C_N^p} = k * \frac{C_{\mathrm{N}+1}^{p+1}}{C_N^p} = 1$$

$$k = \frac{p+1}{N+1}$$

Maki. Mistaken Food

所以

$$\text{answer} = \frac{(p+1)*(i-q)}{(N+1)*(N-p)} * \sum_{i=0} \frac{C_i^q * C_{N-i}^{p-q}}{C_N^p}$$

接下来...数学的魅力！！！

Maki. Mistaken Food

$$C_i^q * (i-q)$$

$$= \frac{N!(i-q)}{(i-q)!*q!}$$

$$= \frac{N!*(q+1)}{(i-q-1)!*(q+1)!}$$

$$= C_i^{q+1} * (q+1)$$

$$\sum_{i=0} C_i^{q+1} * C_{N-i}^{p-q} = C_{\mathrm{N+1}}^{\mathrm{p+2}}$$

Maki. Mistaken Food

开始化简！！！！！

$$\text{answer} = \frac{(p+1)*(i-q)}{(N+1)*(N-p)} * \sum_{i=0} \frac{C_i^q * C_{N-i}^{p-q}}{C_N^p}$$

$$= \frac{(p+1)*(i-q)*(q+1)*C_{N+1}^{p+2}}{(N+1)*(N-p)*C_N^p}$$

$$= \frac{(p+1)*(i-q)*(q+1)*(N+1)!*(N-p)!*p!}{(N+1)*N!*(N-p)*(N-p-1)!*(p+2)!}$$

对你没有看错！！！就是（q+1）/（p+2）